6.1 Métodos para Transformar Gramáticas

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación

Lenguajes Formales y Autómatas CCOS 014

Contenido

Membresia y Parsing

- Dada una cadena w de terminales, queremos saber si w está o no está en $L(G)$, un algoritmo para ello se llama un algoritmo de membresía.

Membresia y Parsing

- El término **parsing** o **análisis sintáctico** refiere al proceso de encontrar una secuencia de producciones mediante las cuales se deriva a $w \in L(G)$.

Para saber si $w \in L(G)$.

1. Sea $X = \{x : S \Rightarrow x\}$
2. Mientras $w \notin X$
   1. Sea $X' = \{x' : x \Rightarrow x', x \in X\}$
   2. $X \leftarrow X'$
3. $w \in L(G)$

Algunas consideraciones

Observación 1

- Note que parsing con fuerza bruta no para si $w \notin L(G)$, ya que seguiría produciendo formas sentenciales indefinidamente.

Algunas consideraciones

Observación 1

- Tenemos que encontrar una manera de decirle que ya no tiene caso que siga haciendo derivaciones porque la cadena $w \notin L(G)$, ya que las formas sentenciales que estamos derivando son más grandes que la longitud de w.

Algunas consideraciones

Observación 1

- Para poder hacer eso tenemos que evitar producciones de la forma $A \to \lambda$ y $A \to B$, estos dos tipos de producciones no incrementan la longitud de la forma sentencial derivada en cada paso, note además que $A \to \lambda$ decrementa la longitud de una forma sentencial cuando se usa.

Teorema 2

Suponga que $G = (V, T, S, P)$ es una gramática libre de contexto que no tiene producciones de la forma $A \to \lambda$ ni $A \to B$, donde $A, B \in V$. Entonces parsing con fuerza bruta se puede convertir un algoritmo que, para cualquier $w \in \Sigma^*$, o produce una derivación para w o nos dice que no es posible y por lo tanto que $w \notin L(G)$.

Demostración: Para cada forma sentencial considere tanto su longitud como el número de terminales que tiene. En cada paso se incrementa al menos uno de estos.

Teorema 2

Suponga que $G = (V, T, S, P)$ es una gramática libre de contexto que no tiene producciones de la forma $A \to \lambda$ ni $A \to B$, donde $A, B \in V$. Entonces parsing con fuerza bruta se puede convertir un algoritmo que, para cualquier $w \in \Sigma^*$, o produce una derivación para w o nos dice que no es posible y por lo tanto que $w \notin L(G)$.

Ya que ni la longitud de la forma sentencial ni el número de símbolos terminales puede exceder $|w|$, una derivación no puede involucrar más de $2|w|$ pasos,

Teorema 2

Suponga que $G = (V, T, S, P)$ es una gramática libre de contexto que no tiene producciones de la forma $A \to \lambda$ ni $A \to B$, donde $A, B \in V$. Entonces parsing con fuerza bruta se puede convertir un algoritmo que, para cualquier $w \in \Sigma^*$, o produce una derivación para w o nos dice que no es posible y por lo tanto que $w \notin L(G)$.

en cuyo momento se tiene un parsing exitoso o w no puede ser generada por la gramática.

Observación 3

Sea L cualquier lenguaje libre de contexto, y sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto para $L - \{\lambda\}$. Entonces la gramática que obtenemos al agregar a V la nueva variable S_0, haciendo a S_0 la variable inicial, y agregando a P las producciones

$$S_0 \to S|\lambda$$

genera a L.

Producciones λ

Por lo tanto, cualquier conclusion no trivial que hagamos para $L - \{\lambda\}$ la podemos transferir con certeza a L.

Producciones λ

Así, dado cualquier gramática libre de contexto G, existe un método para obtener $\widehat{G}$ tal que $L(\widehat{G}) = L(G) - \{\lambda\}$.

Regla de sustitución I

Teorema 4

Sea $G = (V, T, S, P)$ *una gramática libre de contexto. Suponga que* P *contiene una producción de la forma* $A \to x_1 B x_2$*. Asuma que* A *y* B *son variables distintas y que*

$$B \to y_1 | y_2 | \cdots | y_n$$

es el conjunto de todas las producciones en P *que tienen a* B *en su lado izquierdo. Sea* $\widehat{G} = (V, T, S, \widehat{P})$ *la gramática en la que* $\widehat{P}$ *se construye borrando de* P *la producción*

$$A \to x_1 B x_2 \tag{1}$$

y agregando a $\widehat{P}$

$$A \to x_1 y_1 x_2 | x_1 y_2 x_2 | \cdots | x_1 y_n x_2.$$

Entonces, $L(\widehat{G}) = L(G)$*.*

Regla de sustitución II

Demostración: Suponga que $w \in L(G)$, por lo tanto

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_G w.$$

Si la derivación no involucra la producción (1), entonces obviamente

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_{\widehat{G}} w.$$

Si involucra la producción (1), tenemos

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_G u_1 A u_2 \Rightarrow_G u_1 x_1 B x_2 u_2 \Rightarrow_G u_1 x_1 y_j x_2 u_2.$$

Pero con la gramática $\widehat{G}$ podemos obtener lo mismo

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_{\widehat{G}} u_1 A u_2 \Rightarrow_{\widehat{G}} u_1 x_1 y_j x_2 u_2.$$

Regla de sustitución III

Así, podemos alcanzar la misma forma sentencial con G y $\widehat{G}$. Si (1) vuelve a aparecer en una forma sentencial posterior, repetimos el argumento. Se sigue, por inducción sobre el número de veces que aparece A en una forma sentencial, que

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_{\widehat{G}} w.$$

Haciendo un razonamiento inverso tenemos que, $w \in L(G)$ si y sólo si $w \in L(\widehat{G})$.

Ejemplo regla de sustitución

Ejemplo 5

Considere a $G = (\{A, B\}, \{a, b, c\}, A, P)$ con producciones

$$\begin{aligned} A &\to a|aaA|abBc, \\ B &\to abbA|b. \end{aligned}$$

Usando la sustitución para la variable B, obtenemos la gramática $\widehat{G}$ con producciones

$$\begin{aligned} A &\to a|aaA|ababbAc|abbc, \\ B &\to abbA|b. \end{aligned}$$

Tenemos las derivaciones

$$A \Rightarrow_G aaA \Rightarrow_G aaabBc \Rightarrow_G aaabbc$$

$$A \Rightarrow_{\widehat{G}} aaA \Rightarrow_{\widehat{G}} aaabbc$$

Definición 6

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Una variable $A \in V$ se dice que es **útil** si y sólo si existe al menos una $w \in L(G)$ tal que

$$S \overset{*}{\Rightarrow} xAy \overset{*}{\Rightarrow} w, \tag{2}$$

con $x, y \in (V \cup T)^*$. A una variable que no es útil se le llama **inútil**. Una producción es inútil si contiene a cualquier variable inútil.

Ejemplo producciones inútiles I

Ejemplo 7

Considere la gramática cuyas producciones son

$$S \to aSb|\lambda|A,$$
$$A \to aA,$$

la producción $S \to A$ claramente no juega algún papel, ya que A no produce una cadena de terminales, es decir, $A \overset{*}{\not\Rightarrow} w, w \in L(G)$.Note sin embargo que A puede ocurrir en una cadena derivada de S.

Ejemplo 7

Considere la gramática cuyas producciones son

$$S \to aSb|\lambda|A,$$
$$A \to aA,$$

la producción $S \to A$ claramente no juega algún papel, ya que A no produce una cadena de terminales, es decir, $A \not\overset{*}{\Rightarrow} w, w \in L(G)$.Note sin embargo que A puede ocurrir en una cadena derivada de S.

Quitar esta producción no altera el lenguaje generado y simplifica la gramática.

Ejemplo producciones inútiles II

Ejemplo 8

Considere la gramática con símbolo inicial S y con las siguientes producciones

$$
\begin{aligned}
S &\to A, \\
A &\to aA|\lambda, \\
B &\to bA,
\end{aligned}
$$

la variable B es inútil y por lo tanto la producción $B \to bA$.

Ejemplo 8

Considere la gramática con símbolo inicial S y con las siguientes producciones

$$S \to A,$$
$$A \to aA|\lambda,$$
$$B \to bA,$$

la variable B es inútil y por lo tanto la producción $B \to bA$.

No obstante que a partir de B podemos generar una cadena de terminales, no hay forma de que podamos lograr que $S \stackrel{*}{\Rightarrow} xBy$.

Ejemplo quitando producciones inútiles I

Elimine símbolos inútiles y producciones de $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$, donde P consta de las siguientes producciones

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aS|A|C, \\
A &\rightarrow a, \\
B &\rightarrow aa, \\
C &\rightarrow aCb.
\end{aligned}
$$

Ejemplo quitando producciones inútiles I

Elimine símbolos inútiles y producciones de $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$, donde P consta de las siguientes producciones

$$\begin{aligned} S &\to aS|A|C, \\ A &\to a, \\ B &\to aa, \\ C &\to aCb. \end{aligned}$$

- Identificar el conjunto de variables que nos llevan a una cadena de terminales. Por las producciones $A \to a$ y $B \to aa$, las variables A y B pertenecen a este conjunto.

Elimine símbolos inútiles y producciones de $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$, donde P consta de las siguientes producciones

$$\begin{aligned} S &\to aS|A|C, \\ A &\to a, \\ B &\to aa, \\ C &\to aCb. \end{aligned}$$

- Identificar el conjunto de variables que nos llevan a una cadena de terminales. Por las producciones $A \to a$ y $B \to aa$, las variables A y B pertenecen a este conjunto.
- También pertenece S ya que $S \Rightarrow A \Rightarrow a$.

Ejemplo quitando producciones inútiles I

Elimine símbolos inútiles y producciones de $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$, donde P consta de las siguientes producciones

$$
\begin{aligned}
S &\to aS|A|C, \\
A &\to a, \\
B &\to aa, \\
C &\to aCb.
\end{aligned}
$$

- Identificar el conjunto de variables que nos llevan a una cadena de terminales. Por las producciones $A \to a$ y $B \to aa$, las variables A y B pertenecen a este conjunto.
- También pertenece S ya que $S \Rightarrow A \Rightarrow a$.
- No se puede decir lo mismo de C, por lo tanto C es un símbolo inútil.

Ejemplo quitando producciones inútiles II

- Quitando C, sus producciones y terminales involucrados sólo con ella (b) obtenemos una gramática G_1 con variables $V_1 = \{S, A, B\}$, terminales $T = \{a\}$ y producciones

$$
\begin{aligned}
S &\to aS|A, \\
A &\to a, \\
B &\to aa.
\end{aligned}
$$

Ejemplo quitando producciones inútiles II

- Quitando C, sus producciones y terminales involucrados sólo con ella (b) obtenemos una gramática G_1 con variables $V_1 = \{S, A, B\}$, terminales $T = \{a\}$ y producciones

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aS|A, \\
A &\rightarrow a, \\
B &\rightarrow aa.
\end{aligned}
$$

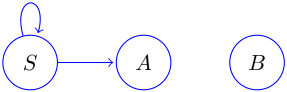
- Ahora debemos eliminar las variables que no son alcanzables desde el símbolo inicial. Para lo cual dibujamos un **grafo de dependencias** etiquetando los nodos con las variables y ponemos una arista entre los nodos C y D si y sólo si hay una producción de la forma

$$C \rightarrow xDy$$

.

Ejemplo quitando producciones inútiles III

- Para nuestras producciones tenemos el siguiente grafo de dependencias



como no hay un camino desde el nodo S hasta el nodo B, concluimos que la variable B es inútil.

Ejemplo quitando producciones inútiles III

- Quitando a B de las variables, las producciones en las que aparece y los correspondientes terminales afectados obtenemos la gramática final $\widehat{G} = (\{S, A\}, \{a\}, S, \widehat{P})$ donde $\widehat{P}$ consta de las producciones

$$S \to aS|A,$$
$$A \to a.$$

Teorema sobre símbolos inútiles I

Teorema 9

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Entonces existe una gramática equivalente $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{T}, S, \widehat{P})$ que no contiene variables ni producciones inútiles.

Demostración: La gramática $\widehat{G}$ puede generarse de G por un algoritmo que consta de dos partes. En la primera parte construimos una gramática intermedia $G_1 = (V_1, T_1, S, P_1)$ tal que V_1 sólo contiene variables A para las cuales

$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} w \in T^*$$

es posible.

El algoritmo es el siguiente

1. $V_1 \leftarrow \emptyset$.
2. Repita el siguiente paso hasta que no se puedan agregar más variables a V_1. Para todo $A \in V$ para la cual P tenga una producción de la forma
$$A \to x_1 x_2 \cdots x_n, \text{ con toda } x_i \in V_1 \cup T,$$
agregue A a V_1.
3. P_1 se compondrá de todas las producciones en P que tengan todos sus símbolos en $V_1 \cup T$.

Teorema sobre símbolos inútiles III

- El procedimiento anterior termina ya que el número de variables y producciones es finito.

Teorema sobre símbolos inútiles III

- Si $A \in V_1$, entonces $A \overset{*}{\Rightarrow} w \in T^*$ es una derivación posible en G_1. Como inicialmente $V_1 \leftarrow \emptyset$, entonces en la iteración primera del segundo paso del algoritmo se agregan a V_1 todas las variables A que sean la parte izquierda de producciones de la forma

$$A \rightarrow a_1 a_2 \cdots a_m, m \geq 1, a_i \in T.$$

- Las siguientes iteraciones del paso dos sólo agregarán variables A que sean la parte izquierda de producciones de la forma

$$A \to x_1 x_2 \cdots x_n, \text{ con toda } x_i \in V_1 \cup T, \tag{3}$$

como el número de producciones es finito, todas las variables que cumplan con (3) serán incluidas en V_1. Además si $A \in V_1$, entonces $A \overset{*}{\Rightarrow} w \in T^*$.

Teorema sobre símbolos inútiles IV

En la segunda parte de la construcción, obtenemos $\widehat{G}$ a partir de G_1.

- Construimos el grafo de dependencias de las variables de G_1 para encontrar todas las variables para las que no hay un camino desde S.

En la segunda parte de la construcción, obtenemos $\widehat{G}$ a partir de G_1.

- Construimos el grafo de dependencias de las variables de G_1 para encontrar todas las variables para las que no hay un camino desde S.
- Las variables que no son alcanzables se eliminan del conjunto de variables y también se eliminan las producciones donde aparecen. También eliminan los símbolos terminales que no aparecen en producciones útiles. El resultado es la gramática $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{T}, S, \widehat{P})$.

Teorema sobre símbolos inútiles IV

En la segunda parte de la construcción, obtenemos $\widehat{G}$ a partir de G_1.

- Construimos el grafo de dependencias de las variables de G_1 para encontrar todas las variables para las que no hay un camino desde S.
- Las variables que no son alcanzables se eliminan del conjunto de variables y también se eliminan las producciones donde aparecen. También eliminan los símbolos terminales que no aparecen en producciones útiles. El resultado es la gramática $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{T}, S, \widehat{P})$.
- Por la construcción, $\widehat{G}$ no contiene símbolos ni producciones inútiles.

- Para cada $w \in L(G)$ tenemos una derivación

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_G xAy \overset{*}{\Rightarrow}_G w.$$

Ya que la construcción de $\widehat{G}$ retiene a A y todas sus producciones asociadas, tenemos todo lo que necesitamos para hacer la derivación

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_{\widehat{G}} xAy \overset{*}{\Rightarrow}_{\widehat{G}} w.$$

Así $w \in L(\widehat{G})$ y por lo tanto $L(G) \subseteq L(\widehat{G})$.

Teorema sobre símbolos inútiles V

- Para cada $w \in L(G)$ tenemos una derivación

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_G xAy \overset{*}{\Rightarrow}_G w.$$

  Ya que la construcción de $\widehat{G}$ retiene a A y todas sus producciones asociadas, tenemos todo lo que necesitamos para hacer la derivación

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_{\widehat{G}} xAy \overset{*}{\Rightarrow}_{\widehat{G}} w.$$

  Así $w \in L(\widehat{G})$ y por lo tanto $L(G) \subseteq L(\widehat{G})$.
- La gramática $\widehat{G}$ se construye a partir de G quitando producciones, así que $\widehat{P} \subseteq P$, por lo tanto $L(\widehat{G}) \subseteq L(G)$. Así $L(G) = L(\widehat{G})$, por lo tanto las gramática G y $\widehat{G}$ son equivalentes.

Quitando producciones-λ

Definición 10

En una gramática libre de contexto a cualquier producción de la forma

$$A \rightarrow \lambda$$

se le llama **producción-λ**. A cualquier variable A para la que es posible la siguiente derivación

$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} \lambda \tag{4}$$

se le llama **variable anulable**.

Ejemplo quitando producciones-λ

Ejemplo 11

Considere la gramática dada por las siguientes producciones.

$$S \rightarrow aS_1b,$$
$$S_1 \rightarrow aS_1b|\lambda,$$

y variable inicial S. Esta gramática genera el lenguaje $\{a^nb^n : n \geq 1\}$ que no contiene a λ. La producción-λ $S_1 \rightarrow \lambda$ se puede quitar después de agregar nuevas producciones obtenidas sustituyendo λ por S_1 donde esta variable ocurra a la derecha. Con lo cual obtenemos la gramática dada por las producciones

$$S \rightarrow aS_1b|ab,$$
$$S_1 \rightarrow aS_1b|ab,$$

Teorema 12

Sea G cualquier gramática libre de contexto que no genere a λ. Entonces existe una gramática equivalente $\widehat{G}$ sin producciones-λ.

Demostración: Primero construya el conjunto V_N de todas las variables anulables de G, mediante los siguientes pasos

1. Para todas las producciones $A \to \lambda$ ponga A en V_N.
2. Repita el siguiente paso hasta que no haya más variables que agregar a V_N.

   Para todas las producciones

$$B \to A_1 A_2 \cdots A_n,$$

   donde $A_1, A_2, \cdots, A_n$ están en V_N, ponga a B en V_N.

Teorema quitando producciones-λ II

Luego, incluimos en $\widehat{P}$ todas las producciones de P que tengan la forma

$$A \to x_1 x_2 \cdots x_m, m \geq 1, \tag{5}$$

donde cada $x_i \in V \cup T$.

Además incluiremos en $\widehat{P}$ las producciones generadas al reemplazar todas las variables anulables de (5) con λ en todas las combinaciones posibles.

Por ejemplo, si x_i y x_j son anulables, entonces habrá una producción en $\widehat{P}$ con x_i reemplazado por λ, otra donde x_j es reemplazado por λ y una más donde tanto x_i como x_j son reemplazados con λ.

Si todas las x_i en (5) son anulables, entonces la producción $P \to \lambda$ no se pone en $\widehat{P}$.

Ejemplo quitando producciones-λ I

Ejemplo 13

Encuentre una gramática libre de contexto sin producciones-λ equivalente a la gramática definida mediante

$$S \to ABaC,$$
$$A \to BC,$$
$$B \to b|\lambda,$$
$$C \to D|\lambda,$$
$$D \to d.$$

Ejemplo quitando producciones-λ II

$$V_N = \{A, B, C\}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABaC, \\ A &\rightarrow BC, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABaC|\lambda BaC|A\lambda aC|ABa\lambda|\lambda\lambda aC|A\lambda a\lambda|\lambda Ba\lambda|\lambda\lambda a\lambda, \\ A &\rightarrow B\lambda|\lambda C|BC, \\ B &\rightarrow b, \\ C &\rightarrow D, \\ D &\rightarrow d. \end{aligned}$$

Quitando producciones unitarias

Definición 14

A cualquier producción de una gramática libre de contexto de la forma

$$A \rightarrow B,$$

donde $A, B \in V$, se le llama **producción unitaria**.

Teorema quitando producciones unitarias I

Teorema 15

Sea $G = (V, T, S, P)$ cualquier gramática sin producciones-λ. Entonces existe una gramática libre de contexto $\widehat{G} = (\widehat{V}, T, S, \widehat{P})$ que no contiene producciones unitarias y es equivalente a G.

Demostración: Cualquier producción unitaria de la forma $A \to A$ se puede quitar sin que haya un efecto, así que sólo es necesario considerar $A \to B$, donde A y B son variables distintas. A primera vista pareciera que podemos usar el teorema (1) directamente con $x_1 = x_2 = \lambda$ para reemplazar

$$A \to B$$

con

$$A \to y_1 | y_2 | \cdots | y_n.$$

Teorema quitando producciones unitarias II

Pero esto no funciona en el caso especial

$$A \to B$$
$$B \to A,$$

las producciones unitarias no se quitan.

Para solucionarlo, busque, para cada A, todas las variables B tales que

$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} B \qquad (6)$$

Para lo cual se dibuja un grafo de dependencias con una arista (C, D) siempre que la gramática tenga una producción unitaria $C \to D$, entonces (6) se cumple siempre que haya un camino entre A y B.

Teorema quitando producciones unitarias III

La nueva gramática $\widehat{G}$ se obtiene poniendo primero en $\widehat{P}$ todas las producciones no unitarias de P.

Teorema quitando producciones unitarias III

La nueva gramática $\widehat{G}$ se obtiene poniendo primero en $\widehat{P}$ todas las producciones no unitarias de P.

Luego, para todo A y B que satisface (6) se agregan a $\widehat{P}$

$$A \rightarrow y_1 | y_2 | \cdots | y_n,$$

donde $B \rightarrow y_1 | y_2 | \cdots | y_n$ son todas las reglas en $\widehat{P}$ que tienen a B del lado izquierdo.

Teorema quitando producciones unitarias III

La nueva gramática $\widehat{G}$ se obtiene poniendo primero en $\widehat{P}$ todas las producciones no unitarias de P.

Luego, para todo A y B que satisface (6) se agregan a $\widehat{P}$

$$A \to y_1|y_2|\cdots|y_n,$$

donde $B \to y_1|y_2|\cdots|y_n$ son todas las reglas en $\widehat{P}$ que tienen a B del lado izquierdo.

Note que como $B \to y_1|y_2|\cdots|y_n$ son tomadas de $\widehat{P}$, ninguna de las y_i puede ser una sola variable, así que no sea crea ninguna producción unitaria en el último paso.

Teorema quitando producciones unitarias III

La nueva gramática $\widehat{G}$ se obtiene poniendo primero en $\widehat{P}$ todas las producciones no unitarias de P.

Luego, para todo A y B que satisface (6) se agregan a $\widehat{P}$

$$A \to y_1|y_2|\cdots|y_n,$$

donde $B \to y_1|y_2|\cdots|y_n$ son todas las reglas en $\widehat{P}$ que tienen a B del lado izquierdo.

Note que como $B \to y_1|y_2|\cdots|y_n$ son tomadas de $\widehat{P}$, ninguna de las y_i puede ser una sola variable, así que no sea crea ninguna producción unitaria en el último paso.

Para demostrar que las gramáticas son equivalentes razonamos como lo hicimos en el teorema (1).

Ejemplo quitando producciones unitarias I

Ejemplo 16

Quite todas las producciones unitarias de la gramática dada por las producciones

$$S \to Aa|B,$$
$$A \to a|bc|B,$$
$$B \to A|bb.$$

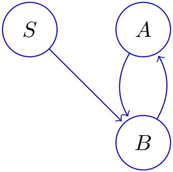
Ejemplo quitando producciones unitarias I

Ejemplo 16

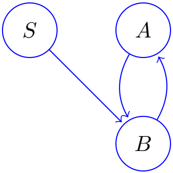
Quite todas las producciones unitarias de la gramática dada por las producciones

$$
\begin{aligned}
S &\to Aa|B,\\
A &\to a|bc|B,\\
B &\to A|bb.
\end{aligned}
$$

El grafo de dependencias de las producciones unitarias es



Ejemplo quitando producciones unitarias II



Como hay un camino de S a A (pasando por B), tenemos $S \stackrel{*}{\Rightarrow} A$, $S \stackrel{*}{\Rightarrow} B$, $B \stackrel{*}{\Rightarrow} A$ y $A \stackrel{*}{\Rightarrow} B$ tienen caminos directos.

Ejemplo quitando producciones unitarias III

Ahora agregamos a $\widehat{P}$ las producciones no unitarias de P

$$
\begin{aligned}
S &\to Aa, \\
A &\to a|bc, \\
B &\to bb.
\end{aligned}
$$

Ejemplo quitando producciones unitarias III

Ahora agregamos a $\widehat{P}$ las producciones no unitarias de P

$$S \to Aa,$$
$$A \to a|bc,$$
$$B \to bb.$$

Recordemos que $S \overset{*}{\Rightarrow} A$, $S \overset{*}{\Rightarrow} B$, $A \overset{*}{\Rightarrow} B$ y $B \overset{*}{\Rightarrow} A$. Agregamos también a $\widehat{P}$ las nuevas reglas que satisfacen (6).

$$S \to a|bc|bb,$$
$$A \to bb,$$
$$B \to a|bc.$$

Todo junto I

Teorema 17

Sea L un lenguaje libre de contexto que no contenga λ. Entonces existe una gramática libre de contexto que general L y que no tiene producciones inútiles, ni producciones-λ, ni producciones unitarias.

Todo junto I

Teorema 17

Sea L un lenguaje libre de contexto que no contenga λ. Entonces existe una gramática libre de contexto que general L y que no tiene producciones inútiles, ni producciones-λ, ni producciones unitarias.

Demostración: Los procedimientos dados en los teoremas 9, 12 y 15, eliminan respectivamente esos tipos de producciones. Sin embargo note que

Todo junto I

Teorema 17

Sea L un lenguaje libre de contexto que no contenga λ. Entonces existe una gramática libre de contexto que general L y que no tiene producciones inútiles, ni producciones-λ, ni producciones unitarias.

Demostración: Los procedimientos dados en los teoremas 9, 12 y 15, eliminan respectivamente esos tipos de producciones. Sin embargo note que

- El procedimiento para eliminar producciones-λ puede crear producciones unitarias.

Todo junto I

Teorema 17

Sea L un lenguaje libre de contexto que no contenga λ. Entonces existe una gramática libre de contexto que general L y que no tiene producciones inútiles, ni producciones-λ, ni producciones unitarias.

Demostración: Los procedimientos dados en los teoremas 9, 12 y 15, eliminan respectivamente esos tipos de producciones. Sin embargo note que

- El procedimiento para eliminar producciones-λ puede crear producciones unitarias.
- El procedimiento para eliminar producciones unitarias requiere que la gramática no tenga producciones-λ.

Teorema 17

Sea L un lenguaje libre de contexto que no contenga λ. Entonces existe una gramática libre de contexto que general L y que no tiene producciones inútiles, ni producciones-λ, ni producciones unitarias.

Demostración: Los procedimientos dados en los teoremas 9, 12 y 15, eliminan respectivamente esos tipos de producciones. Sin embargo note que

- El procedimiento para eliminar producciones-λ puede crear producciones unitarias.
- El procedimiento para eliminar producciones unitarias requiere que la gramática no tenga producciones-λ.
- Eliminar producciones unitarias no crea producciones-λ.

Todo junto I

Teorema 17

Sea L un lenguaje libre de contexto que no contenga λ. Entonces existe una gramática libre de contexto que general L y que no tiene producciones inútiles, ni producciones-λ, ni producciones unitarias.

Demostración: Los procedimientos dados en los teoremas 9, 12 y 15, eliminan respectivamente esos tipos de producciones. Sin embargo note que

- El procedimiento para eliminar producciones-λ puede crear producciones unitarias.
- El procedimiento para eliminar producciones unitarias requiere que la gramática no tenga producciones-λ.
- Eliminar producciones unitarias no crea producciones-λ.
- Eliminar producciones inútiles no crea ni producciones-λ, ni producciones unitarias.

Todo junto II

Por lo tanto, podemos eliminar las producciones indeseables siguiendo la siguiente secuencia de pasos

1. Quite las producciones-λ.
2. Quite las producciones unitarias.
3. Quite las producciones inútiles.

Siguiendo dichos pasos el teorema 17 se cumple.

Ejercicios I

1. Elimine la variable B de la gramática

$$S \to aSB|bB,$$
$$B \to aA|b.$$

2. Elimine las producciones inútiles de la gramática

$$S \to aS|AB|\lambda,$$
$$A \to bA,$$
$$B \to AA.$$

3. Elimine las producciones-λ de

$$S \to aSS,$$
$$S \to bb|\lambda.$$

Ejercicios II

4. Elimine las producciones-λ de

$$S \to AaB|aaB,$$
$$A \to \lambda,$$
$$B \to bbA|\lambda.$$

5. Elimine las producciones unitarias, las producciones inútiles y las produccioens-λ de la gramática dada por las producciones

$$S \to aA|aBB,$$
$$A \to aaA|\lambda,$$
$$B \to bB|bbC,$$
$$C \to B.$$